DE CONVERGENTIE VAN DE GROEI in de NIEUWE LIDSTATEN van de EUROPESE UNIE

J. Blomme

Adviseur – generaal van Financiën

Federale
Overheidsdienst
FINANCIEN

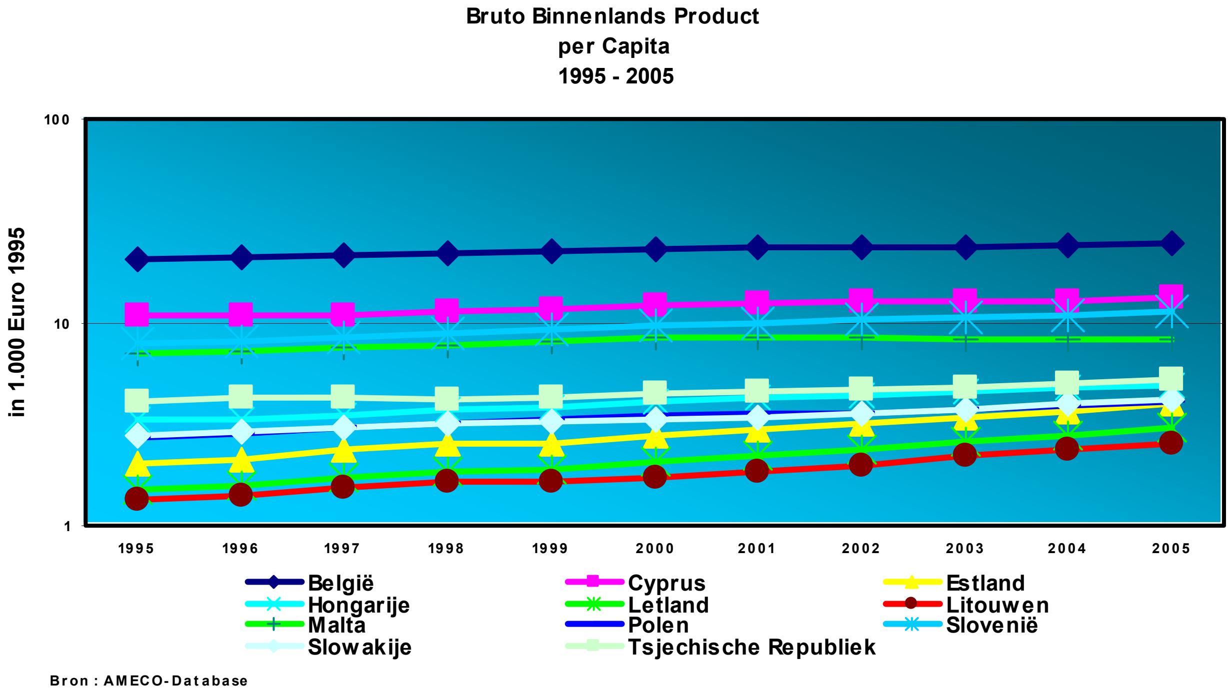
STUDIE- EN DOCUMENTATIEDIENST
Koning Albert II laan 33 bus 73
1030 BRUSSEL

Samenvatting

De groei van het bruto binnenlands product per hoofd in de 10 nieuwe Lidstaten is beduidend groter dan de groei in de ‘oude’ Lidstaten. Bovendien lijkt het erop dat hoe lager het initieel bruto binnenlands product per capita van een land is, hoe hoger de groei van dit land is. Deze bevindingen stroken met de convergentietheorie, die ervan uit gaat dat elke economie tendeert naar een “*steady state*” groeiritme, en dat hoe verder de economie verwijderd is van dit groeiritme, des te sneller zij naar dit groeiritme convergeert. De convergentie wordt veelal gemeten naar de correlatie tussen de groei van het per capita inkomen en het initieel per capita inkomen (β-convergentie) of naar de afname van de spreiding van het per capita inkomen (σ-convergentie). In deze nota wort kort ingegaan op de theoretische grondslagen van de convergentietheorie, het groeimodel van Solow-Swan. Vervolgens wordt de convergentieratio geschat op basis van de β-convergentie en van de σ-convergentie. Beide ramingen suggereren dat, onder de hypothese dat alle Lidstaten naar dezelfde “*steady state*” groei tenderen, de nieuwe Lidstaten hun achterstand t.o.v. die groei met ongeveer 2,4 % per jaar afbouwen.

Inleiding

Onderstaande grafiek geeft, over de periode 1995 – 2005, in een semi-logaritmische schaal, de evolutie van het per capita inkomen van de 10 nieuwe Lidstaten van de Europese Unie en van een van de "oudere" Lidstaten, nl. België.



Figuur 1

Uit de figuur lijkt men te kunnen afleiden dat :

1. het niveau van het per capita inkomen van de nieuwe Lidstaten tendeert naar het niveau van het per capita inkomen van België
2. hoe lager het initiële per capita inkomen, hoe sneller de groei van dat inkomen.

Deze tendens lijkt compatibel te zijn met het eenvoudige tekstboek groeimodel van Solow en Swan.

Heel wat litteratuur betreffende de convergentie van de groei van economieën is dan ook op dit Solow – Swan groeimodel gebaseerd.

Hierna volgt, ter herinnering, een korte beschrijving van dit model.

Het Solow – Swan groeimodel

De Productiefunctie

Een neo-klassieke productiefunctie met

$$Y = F\ (K,L) \tag{1}$$

met $$\frac{\delta F}{\delta K} > 0 \text{ en } \frac{\delta F}{\delta L} > 0 \tag{2}$$

en $$\frac{\delta^2 F}{\delta K^2} < 0 \text{ en } \frac{\delta^2 F}{\delta L^2} < 0$$

die homogeen lineair is :

$$F\ (\lambda K, \lambda L) = \lambda\ F\ (K,L) = \lambda\ Y \tag{3}$$

kan geschreven worden in kapitaalintensiteitsvorm :

$$Y = L\ F\ (\frac{K}{L},1) = L\ \ f(k) \text{ en } y = f(k) \tag{4}$$

waarbij $$k = \frac{K}{L} \text{ en } y = \frac{Y}{L} \qquad (5) \text{ en } (6)$$

Het evenwicht tussen investeren en sparen

Het Solow – Swan groeimodel voegt daar nog volgende hypothesen aan toe :

$$\dot{K} = I - \Delta K \ \ met\ \ \dot{K} = \frac{\delta K}{\delta t} \tag{10}$$

I de bruto investeringen

Δ de afschrijvingsvoet

$$I = S \tag{11}$$

met $S = s\,Y = s\,L\;f(k)$ (12)

zo dat $\dot{K} = s\,L\;f(k) - \Delta\,K$ *(13)*

en $\dot{K}\,/\,L = s\;f(k) - \Delta\,k$ *(14)*

Het groeiritme van de arbeid wordt verondersteld constant te zijn :

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{d\ln(L)}{dt} = n \tag{15}$$

waardoor $\dfrac{d\,\frac{K}{L}}{dt} = \dfrac{dk}{dt} = \dot{k} = \dfrac{dK}{dt} * \dfrac{1}{L} - \dfrac{K}{L} * \dfrac{1}{L} * \dfrac{dL}{dt}$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - kn$$

en $\dot{K} = \dot{k}\,L + knL$ *(16)*

De hypothese dat het sparen gelijk is aan de bruto investeringen impliceert dat rekening houdend met de vergelijkingen (16), (10) en (14) :

$$sf(k) - \Delta k = \dot{k} + kn$$

of $\boxed{\dot{k} = sf(k) - (n + \Delta)k}$ *(17)*

Vergelijking (17) is de fundamentele differentiaalvergelijking van het groeimodel van Solow-Swan.

Het groeipad van de kapitaalintensiteit en de output per capita

Veronderstellen we verder dat de productiefunctie van het Cobb-Douglas type is :

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad (18)$$

dan is $$y = f(k) = k^{\alpha} \qquad (19)$$

en $$\boxed{\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha} - (n+\Delta)k} \qquad (20)$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking leidt tot het volgende groeipad van de kapitaalintensiteit k:

$$\boxed{k(t)^{1-\alpha} = \left[k(0)^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\Delta} \right] e^{-(1-\alpha)(n+\Delta)t} + \frac{s}{n+\Delta}} \qquad (25)$$

De "steady state" waarden van de kapitaalintensiteit en van de output per capita

Indien $t \to \infty$

dan is

$$\lim_{t \to \infty} k^{1-\alpha} = \frac{s}{n+\Delta}$$

wat beduidt dat de "steady state" waarde van de kapitaal arbeid verhouding(kapitaalintensiteit) k^* *wordt gegeven door de volgende constante waarde :*

$$\boxed{k^* = \left[\frac{s}{n+\Delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}} \qquad (26)$$

Het groeipad van het per capita inkomen kan worden afgeleid uit (19) :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{k^{\alpha}} \alpha k^{\alpha-1} \frac{dk}{dt}$$

of $$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} \qquad (27)$$

en met (20) :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{d \ln y}{dt} = \alpha\left[s\, k^{\alpha-1} - (n+\Delta)\right]$$

Het "steady state" per capita inkomen wordt met (26) en (19) :

$$\boxed{y^{*} = \left[\frac{s}{n+\Delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \qquad (28)$$

In de "steady state", wanneer k de waarde $k^{*} = \left[\frac{s}{n+\Delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ bereikt, zijn de output per tewerkgestelde en de kapitaalstock per tewerkgestelde constant. De ganse economie groeit aan het ritme n, het groeiritme van de tewerkstelling L.

Uit $$\frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - (n+\Delta) \text{ waarbij } k = \overset{*}{k} = \left[\frac{s}{n+\Delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

volgt $$\frac{\dot{k}}{k} = s\left[\frac{s}{n+\Delta}\right]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} - (n+\Delta)$$

en $$\frac{\dot{k}}{k} = s\left[\frac{s}{n+\Delta}\right]^{-1} - (n+\Delta)$$

of $\frac{\dot{k}}{k} = 0$

en wegens (27) :

$$\frac{\dot{y}}{y} = 0$$

Het groeiritme van de output Y en de kapitaalstock K in de “steady state” kan als volgt worden berekend :

Daar $Y = f(t)L = yL$ en $\frac{\dot{L}}{L} = n$

is $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{L}{Y} + \frac{dL}{dt}\frac{y}{Y}$

of $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$

of nog $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}}{y} + n$ (29)

en indien $k = k^*$ waarbij $\frac{\dot{y}}{y} = 0$

wordt $\frac{\dot{Y}}{Y} = n$ (30)

Daar $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$

is $\ln Y = \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L$

afgeleid naar de tijd wordt dit :

$$\frac{d\ln Y}{dY}\frac{dY}{dt} = \alpha\frac{d\ln K}{dK}\frac{dK}{dt} + (1-\alpha)\frac{d\ln L}{dl}\frac{dL}{dt}$$

of $$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L} \qquad (31)^{1}$$

Rekening houdend met het "steady state" groeitrime van Y nl.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = n$$

wordt dit $$\alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)n = n$$

of $$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{n-(1-\alpha)n}{\alpha} = n \qquad (32)$$

De stabiliteit van de "steady state"

De "steady state" waarde van k nl. :

$$k^* = \left[\frac{s}{n+\Delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

is een stabiele waarde.

D.w.z. dat indien $k < \overset{*}{k}$, dan zal k toenemen tot $\overset{*}{k}$,

[1] Dit resultaat kan ook bekomen worden door toepassing van Euler's theorema.

en indien $k > \overset{*}{k}$, dan zal k afnemen tot $\overset{*}{k}$

Stel $\quad k < \overset{*}{k}$

dan is $\quad k^{1-\alpha} < \dfrac{s}{n+\Delta}$

of $\quad k^{\alpha-1} > \dfrac{n+\Delta}{s}$

of $\quad sk^{\alpha-1} > (n+\Delta)$

rekening houdend met

$$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha-1} - (n+\Delta)$$

volgt $\quad \dfrac{1}{k}\dfrac{dk}{dt} > 0 \quad$ of k stijgt (33)

Analoog indien $k > \overset{*}{k}$

dan is $\quad k^{1-\alpha} > \dfrac{s}{n+\Delta}$

of $\quad k^{\alpha-1} < \dfrac{n+\Delta}{s}$

of $\quad sk^{\alpha-1} < (n+\Delta)$

rekening houdend met

$$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha-1} - (n+\Delta)$$

volgt $\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} < 0$ of k daalt (34)

De integratie van de technologische vooruitgang in het Solow- Swan model

In de eenvoudige versie van het Solow – Swan model is de groei van het aanbod van arbeid (bevolking) de sleutelvariabele in de groei van de economie. Kapitaal en output groeien in de "steady state" aan het ritme van de groei van de tewerkstelling (bevolking). In de productiefunctie kan evenwel expliciet rekening worden gehouden met het effect van de evolutie van de technologische vooruitgang op de groei van de output.

A priori zijn er drie manieren om in een productiefunctie met twee productiefactoren de effecten van de technologische vooruitgang te integreren.

1. De Hicks neutrale technologische vooruitgang, waarbij de verhouding van de marginale producten niet verandert voor een gegeven kapitaal arbeid ratio. De productiefunctie kan dan als volgt worden geschreven :

   $$Y = F(K, L, t) = T(t) * F(K, L) \tag{35}$$

2. De Harrod neutrale technologische vooruitgang, waarbij $\frac{K * F_K}{L * F_L}$ constant blijft voor een gegeven kapitaal output ratio. De productiefunctie is dan :

   $$Y = F\left[K, L * A(t)\right] \tag{36}$$

   met A(t) de index van de technologische vooruitgang.

   Deze vorm wordt de '*labour augmenting*" technologische vooruitgang genoemd, omdat zij hetzelfde effect heeft als een toename van de tewerkstelling. De productiefactor arbeid wordt uitgedrukt in door de technologie geïnduceerde arbeidsequivalenten.

3. De Solow neutrale technologische vooruitgang waarbij de verhouding $\frac{L * F_L}{K * F_K}$ constant blijft voor een gegeven arbeid output ratio. De productiefunctie is dan :

$$Y = F\left[K * B(t), L\right] \tag{37}$$

met B(t) de index van de technologische vooruitgang

Het is evident dat de Harrod technologische vooruitgang past in het kader van het Solow – Swan model, daar de productiefunctie met Harrod neutrale technologische vooruitgang terug te leiden is tot de in het eenvoudige Solow – Swan model gebruikte productiefunctie, met het groeiritme van de door technologische vooruitgang geïnduceerde arbeidsequivalenten dat de som is van het groeiritme van de tewerkstelling en het groeiritme van de technologie. Het kan worden aangetoond[2] dat de integratie van de technologische vooruitgang in het Solow – Swan model Harrod neutrale technologische vooruitgang vereist om een “steady state” groei te genereren.

Stel dat

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{d \ln T}{dt} = x \tag{38}$$

met x het groeiritme van de technologische vooruitgang,

en dat zoals voorheen

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{d \ln(L)}{dt} = n \tag{15}$$

dan is het duidelijk dat in de productiefunctie, het groeiritme van de factor arbeid, gedefinieerd als de door technologische vooruitgang geïnduceerde arbeidsequivalenten $x + n$ is :

$$Y = K^{\alpha}\left[Le^{nt}Ae^{xt}\right]^{1-\alpha}$$

$$Y = K^{\alpha}\left[LAe^{(n+x)t}\right]^{1-\alpha} \tag{39}$$

[2] zie R.J. BARRO en X. SALA-I-MARTIN : Economic Growth. Mc Graw-Hill. Inc. New York. 1995. ISBN 0-07-003697

M.a.w. alle relaties van het model, dat niet expliciet rekening houdt met de technologische vooruitgang, blijven geldig met als groei van de factor arbeid(sequivalenten) de som van de natuurlijke groei van de tewerkstelling en de groei van de technologie.

Zo wordt bijvoorbeeld de fundamentele differentiaalvergelijking

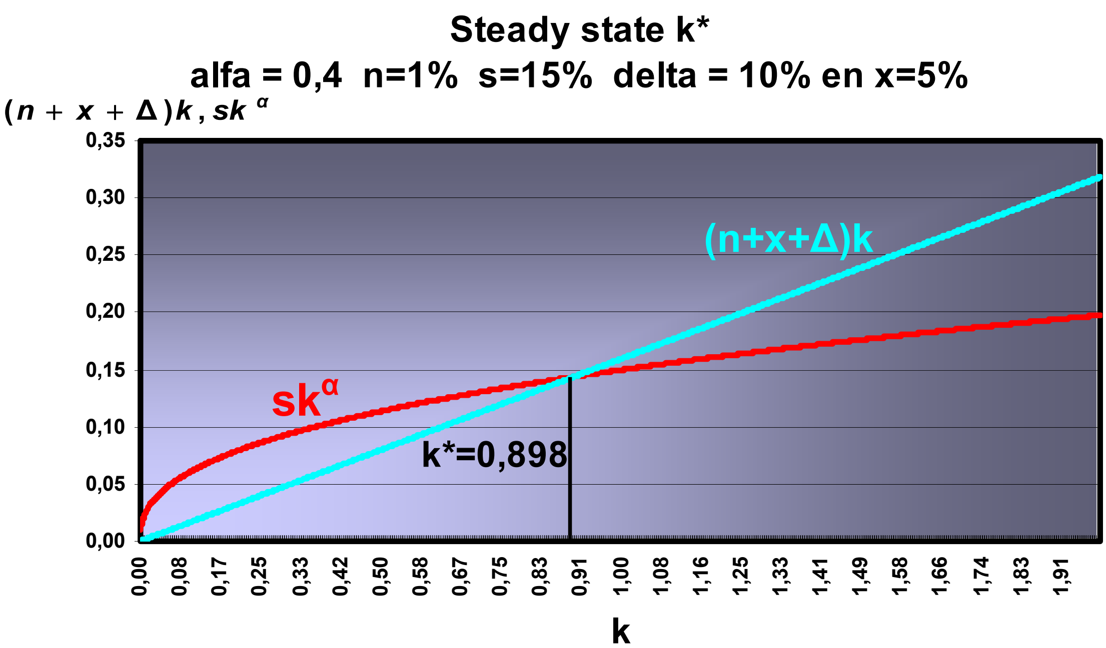
$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\ln k}{dt} = sk^{\alpha-1} - (n + x + \Delta) \tag{40}$$

en de "steady state" waarde van de kapitaal/arbeidsratio :

$$k^* = \left[\frac{s}{n + x + \Delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{41}$$

en de "steady state" waarde van de output per arbeidsequivalent :

$$\boxed{y^* = \left[\frac{s}{n + x + \Delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$



Figuur 2

De convergentie van de groei

Uit (40) : $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d \ln k}{dt} = sk^{\alpha-1} - (n + x + \Delta)$

volgt dat :

$$\frac{\delta \frac{\dot{k}}{k}}{\delta k} = s(\alpha - 1)k^{\alpha-2} \qquad (42)$$

en daar $s, k > 0$ en $0 < \alpha < 1$

volgt dat $\boxed{\frac{\delta \frac{\dot{k}}{k}}{\delta k} < 0}$ (43)

Dit impliceert dat de groei van k groter is naarmate k kleiner is, en omgekeerd.

Bij ***absolute convergentie*** wordt verondersteld dat in alle landen de factoren die de "steady state" bepalen dezelfde waarde hebben, waardoor de "steady state" in alle landen dezelfde is. Bij ***conditionele convergentie*** daarentegen wordt aangenomen dat de factoren die de "steady state" waarden bepalen, niet in alle landen dezelfde waarde hebben, zodat de "steady state" van land tot land kan verschillen.

De snelheid waarmede de economie naar de "steady state" evolueert kan worden benaderd door een eerste orde Taylor expansie[3] van de relatie $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d \ln k}{dt} = sk^{\alpha-1} - (n + x + \Delta)$ rond de logaritme van de "steady state" waarde k^* :

[3] zie Bijlage 1

$$\boxed{\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\ln k}{dt} \approx -(1-\alpha)(n+x+\Delta)(\ln k - \ln k^*)} \qquad (44)$$

Analoog kan de snelheid waarmee de output per arbeidsequivalent de "steady state" waarde y^* zal bereiken uit (44) worden berekend rekening houdend met (27) $\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k}$ en (19) $y = k^\alpha$

als $$\boxed{\frac{\dot{y}}{y} = \frac{d\ln y}{dt} \approx -(1-\alpha)(n+x+\Delta)(\ln y - \ln y^*)} \qquad (45)$$

De term $$\boxed{\lambda = (1-\alpha)(n+x+\Delta)} \qquad (46)$$

is de convergentieratio, de ratio die aangeeft in welke mate het verschil tussen de "steady state" waarde en de actuele waarde van de kapitaalintensiteit en de output per arbeidsequivalent de zal overbrugd worden.

De differentiaalvergelijking $$\frac{\dot{y}}{y} = -\lambda(\ln y - \ln y^*) \qquad (46')$$

heeft volgende oplossing :

$$\boxed{\ln y(t) = (1-e^{-\lambda t})\ln y^* + e^{-\lambda t}\ln y(0)} \qquad (51)$$

met $\lambda = (1-\alpha)(n+x+\Delta)$ de convergentieratio (46)

(51) kan ook worden geschreven als :

$$\boxed{\ln y(t) - \ln y(0) = (1-e^{-\lambda t})\ln y^* - (1-e^{-\lambda t})\ln y(0)} \qquad (51')$$

Vergelijking (51), die uitgedrukt is in de productie per arbeidsequivalent, kan uitgedrukt worden in de productie per tewerkgestelde $\hat{y} = \frac{Y}{L(0)e^{nt}}$ (54)

$$\boxed{\begin{aligned}&\ln \hat{y} - \ln \hat{y}(0) = \\ &(1-e^{-\lambda t})\ln y^{*} - (1-e^{-\lambda t})\ln \hat{y}(0) + (1-e^{-\lambda t})\ln A(0) + xt\end{aligned}} \quad (58)$$

In deze vergelijking kan de term $\ln y^{*}$ gedefinieerd worden als een functie van meerdere parameters, die voor elk land afzonderlijk verschillende waarden zouden kunnen aannemen. Meestal wordt echter de heroïsche hypothese gemaakt dat de "steady state" output per arbeider (arbeidsequivalenten) gelijk is voor alle (beschouwde) landen.

Daarom wordt de vergelijking meestal geschat als:

$$\boxed{\ln y(t) - \ln y(t-1) = \alpha + \beta(\ln y(t-1))} \quad (59)$$

wat equivalent is aan :

$$\ln y(t) = \alpha + (1+\beta)\ln y(t-1) \quad (59')$$

De constante term α herbergt de "steady state" waarde $\ln y^{*}$ en de logaritme van de actuele waarde van $A(t) = A(t-1)e^{x}$, beide vermenigvuldig met de coëfficiënt $(1-e^{-\lambda})$.

Twee manieren om de convergentieratio te schatten

1. β – convergentie

Vergelijking (59) kan geschat worden als een eenvoudige “cross-section” regressie over meerdere landen, waarbij de afhankelijke variabele de logaritme is van de verhouding van het per capita inkomen in jaar t op het per capita inkomen in jaar (t-1), en de onafhankelijke variabele, de logaritme van het inkomen per capita in het jaar (t-1). De geschatte coëfficiënt β biedt dan een schatter voor λ, de convergentieratio via de relatie :

$$\beta = -(1 - e^{-\lambda}) \qquad (60)$$

of $$\lambda = -\ln(\beta + 1) \qquad (60')$$

2. σ – convergentie

De relatie (59’) kan ook gebruikt worden als basis voor een schatting (tijdreeks) van de evolutie van de spreiding van het inkomen per hoofd in periode (t) t.o.v. de spreiding van het inkomen per hoofd in het jaar (t-1), over meerdere jaren.

Uit $$\ln y(t) = \alpha + (1 + \beta) \ln y(t-1)$$

volgt, rekening houdend met het feit dat de variantie van (a+bx) met

a : een constante
b : een constante
x : een variabele met als variantie σ_x^2

gegeven wordt door :

$$\sigma^2_{(a+bx)} = b^2 \sigma_x^2$$

dat

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2_{\ln y(t)} = (1 + \beta)^2 \sigma^2_{\ln y(t-1)}}} \qquad (61)$$

In deze vorm leidt de geschatte coëfficiënt $(1+\beta)$ van $\sigma_{y(t-1)}$ tot een schatter van λ :

$$\lambda = -\ln(\beta + 1)$$

Zowel de β – convergentie als de σ – convergentie leiden tot dezelfde schatter van de convergentieratio $\hat{\lambda}$:

Met $\hat{\gamma} = \hat{\beta} + 1$ (62)

Wordt

$$\boxed{\hat{\lambda} = -\ln(\hat{\beta} + 1) = -\ln(\hat{\gamma})} \quad (63)$$

En $\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}} = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}}}{\hat{\gamma}}}$ (64)

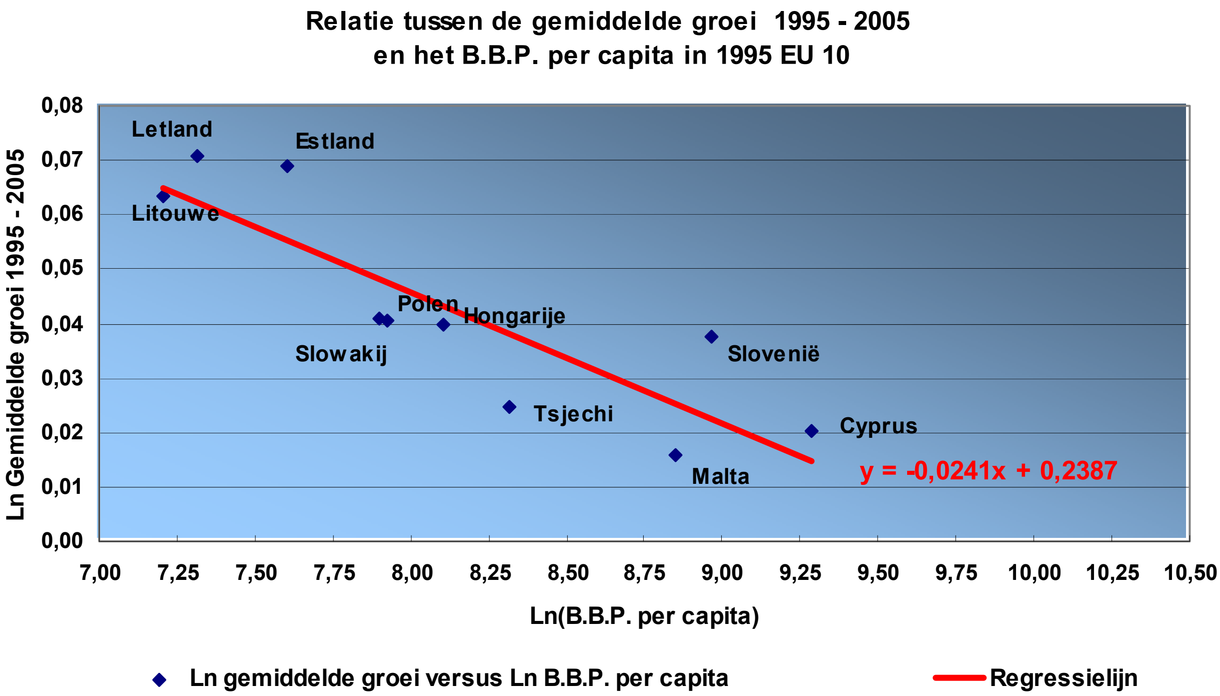
De resultaten voor de 10 nieuwe Lidstaten.

β - convergentie

Voor de afhankelijke variabele in vergelijking (59) werd de logaritme van de gemiddelde groei

$$\ln[\overline{y(t)/y(t-1)}]$$

genomen over de periode 1995 – 2005. Voor de onafhankelijke variabele wordt de logaritme van het B.B.P. per capita van 1995 genomen.



Figuur 3

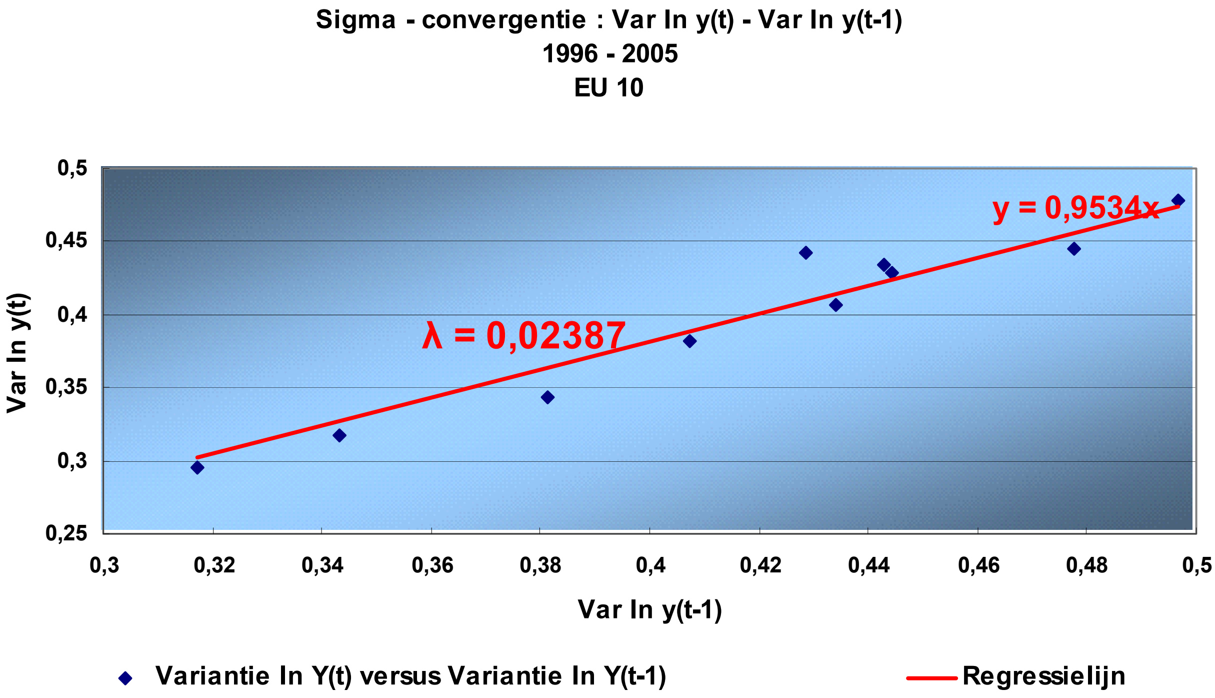
De geschatte vergelijking is:

$$\ln \overline{\frac{y_t}{y_{t-1}}} = 0{,}2387 \; - \; 0{,}02412 \ln y_{1995}$$
$$(0{,}0409)^{**} \quad (0{,}0050)^{**}$$

met gecorrigeerde R^2 : 0,712

λ = 0,02441 (met σ_λ = 0,005125) of het bruto binnenlands product per capita van de nieuwe Lidstaten groeit naar de “steady state” toe met 2,44 % per jaar.

σ- convergentie



Figuur 4

De geschatte vergelijking is :

$$\text{Var ln } y(t) = \underset{(0{,}0115)^{**}}{0{,}95339} \text{ Var ln } y(t-1)$$

met gecorrigeerde R^2 : 0,8248

λ = 0,02387(met σ_λ = 0,011809) of het bruto binnenlands product per capita van de nieuwe Lidstaten groeit naar de “steady state” toe met 2,39 % per jaar.

Ter vergelijking het convergentieritme dat geschat werd via de β-convergentie methode bedroeg op basis van de gegevens voor de 10 nieuwe Lidstaten 2,44 % per jaar.

De schattingen van de β-convergentie en van de σ-convergentie lijken elkaar dus te bevestigen. Ook het verschil tussen de convergentiesnelheid van alle Lidstaten met deze van de 10 nieuwe Lidstaten is analoog bij beide convergentiemaatstaven.

Jozef Blomme

4 mei 2006

Bibliografie

Andrés J., Bisca J. en Doménech R., Sigma-convergence in the OECD, Traditional Dynamics or Narrowing Steady State Differences? University of Valencia. April 2003.

Barro R. J. and Sala-i-Martin. X., Economic Growth, MIT Press, 2nd Ed. 2003.

Greene W., Econometric Analysis, 4th Edition, 2000. Upper Saddle River, N.J. Prentice Hall International.

Young A., Higgins., M.J. and Levi D., Sigma-Convergence versus Beta-Convergence : Evidence from U.S. County-Level Data, Department of Economics, Emory University, Atlanta, April 2004.

Bijlage 1 Mathematische bijlage

Oplossing van de differentiaalvergelijkingen

$$\boxed{\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha} - (n+\Delta)k} \qquad (20)$$

Deze differentiaalvergelijking kan als volgt worden opgelost :

$$k^{-\alpha} * \frac{dk}{dt} + (n+\Delta)\,k^{1-\alpha} = s$$

stel z = $k^{1-\alpha}$ *(21)*

dan wordt

$$\frac{dz}{dt} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\,\frac{dk}{dt}$$

waardoor de differentiaalvergelijking kan worden geschreven als :

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dt} + (n+\Delta)z = s$$

De algemene oplossing van deze vergelijking kan als volgt worden gevonden :

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dt} + (n+\Delta)z = 0$$

of $$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = -(1-\alpha)(n+\Delta)$$

en $$\int \frac{1}{z}\,dz = \int -(1-\alpha)(n+\Delta)dt$$

waaruit volgt dat:

$$\ln z = c - (1-\alpha)(n+\Delta)t$$

en $z = Ce^{-(1-\alpha)(n+\Delta)t}$ *met* $C = e^{c}$ *(22)*

De particuliere oplossing kan als volgt worden gevonden :

$$(n+\Delta)z = s$$

dus is $$z = \frac{s}{n+\Delta} \qquad (23)$$

De totale oplossing is dan gegeven door (22) + (23) :

$$z = Ce^{-(1-\alpha)(n+\Delta)t} + \frac{S}{n+\Delta}$$

met $$Z(0) = C + \frac{S}{n+\Delta}$$

waardoor C kan bepaald worden als :

$$C = z(0) - \frac{s}{n+\Delta}$$

en $$\boxed{z(t) = \left[z(0) - \frac{s}{n+\Delta}\right]e^{-(1-\alpha)(n+\Delta)t} + \frac{s}{n+\Delta}} \qquad (24)$$

het groeipad van de kapitaalintensiteit k wordt, rekening houdend met (21) :

$$\boxed{k(t)^{1-\alpha} = \left[k(0)^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\Delta}\right]e^{-(1-\alpha)(n+\Delta)t} + \frac{s}{n+\Delta}} \qquad (25)$$

Oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{\dot{y}}{y} = -\lambda(\ln y - \ln y^{*})$$

De differentiaalvergelijking $\frac{\dot{y}}{y} = -\lambda(\ln y - \ln y^{*})$ (46')

kan op de volgende wijze worden opgelost :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{d \ln y}{dt} + \lambda \ln y = \lambda \ln y^{*} \quad (47)$$

stel dat $z = \ln y$ (48)

dan wordt (46')

$$\frac{dz}{dt} + \lambda z = \lambda \ln y^{*} \quad (47)$$

met als algemene oplossing :

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = -\lambda$$

waaruit $\int \frac{1}{z} dz = -\int \lambda dt$

$$\ln z = -\lambda t + C$$

$$z = Ce^{-\lambda t} \quad (48)$$

en als particuliere oplossing

$$\lambda z = \lambda \ln y^{*}$$

$$z = \ln y^* \tag{49}$$

en de totale oplossing (48) + (49)

$$z = Ce^{-\lambda t} + \ln y^* \tag{50}$$

met $\quad z(0) = C + \ln y^*$

zodat $\quad C = z(0) - \ln y^*$

rekening houdend met (49) wordt (50)

$$\ln y = \left[\ln y(0) - \ln y^*\right] e^{-\lambda t} + \ln y^*$$

of $\quad \boxed{\ln y(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \ln y^* + e^{-\lambda t} \ln y(0)} \quad (51)$

met $\quad \lambda = (1-\alpha)(n + x + \Delta)$ de convergentieratio $\quad (46)$

De eerste orde Taylor expansie van

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\ln k}{dt} = sk^{\alpha-1} - (n + x + \Delta)$$

Een Taylor expansie van de functie y= f(x) rond de waarde x_0 wordt gegeven door de oneindige reeks :

$$y \approx f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

De eerste orde Taylor expansie van de relatie $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\ln k}{dt} = sk^{\alpha-1} - (n + x + \Delta)$ rond de logaritme van de “steady sate” waarde k^* wordt:

daar de eerste term $f(x_0)$ = 0

omdat $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\ln k^*}{dt} = 0$[4],

$$\frac{\dot{k}}{k} \approx \left[\frac{d(sk^{\alpha-1})}{dk}\frac{dk}{d\ln k} - \frac{d(n + x + \Delta)}{d\ln k}\right] * (\ln k - \ln k^*)$$

$$\approx (s(\alpha - 1)k^{\alpha-2} * k)(\ln k - \ln k^*)$$
$$\approx -s(1 - \alpha)k^{\alpha-1}(\ln k - \ln k^*)$$
$$\approx -(1 - \alpha)(n + x + \Delta)(\ln k - \ln k^*)$$

[4] In de “strady state” is k constant.

daar $$\frac{d\ln k^*}{dt} + (n + x + \Delta) = sk^{\alpha-1}$$

$$\boxed{\frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\ln k}{dt} \approx -(1-\alpha)(n+x+\Delta)(\ln k - \ln k^*)} \qquad (44)$$

Bijlage 2 : Stimuleert de verlaging van de belastingen op het sparen de groei?

In het Solow – Swan model is de spaarkwote s een van de determinerende factoren van het niveau van de "steady state" per capita[5] kapitaalstock en van het "steady state" per capita[6] inkomen. Vandaar dat dit model nogal eens wordt gebruikt om aan te tonen dat een verlaging van de belasting op het spaarinkomen de economie op een hoger inkomensniveau kan tillen. Ook in het standaard werk van Barro en Sala-i-Martin (1995), dat hierboven werd geciteerd wordt deze "excursie" gemaakt.

De redenering gaat als volgt : indien het spaarvolume, en dus het investeringsvolume positief gecorreleerd zijn aan de netto opbrengst van het sparen, dan zal een belastingverlaging op het spaarinkomen de spaarneiging doen toenemen. Daar het "steady state" niveau van het per capita inkomen gegeven is door

$$\boxed{y^* = \left[\frac{s}{n+x+\Delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

zal, indien de spaarneiging toeneemt, ook het "steady state" niveau van het per capita inkomen toenemen. Toch zal de economie, eens op dit hoger niveau, blijven groeien aan het groeiritme van de arbeid n (of het groeiritme van de arbeidsequivalenten (n+x).

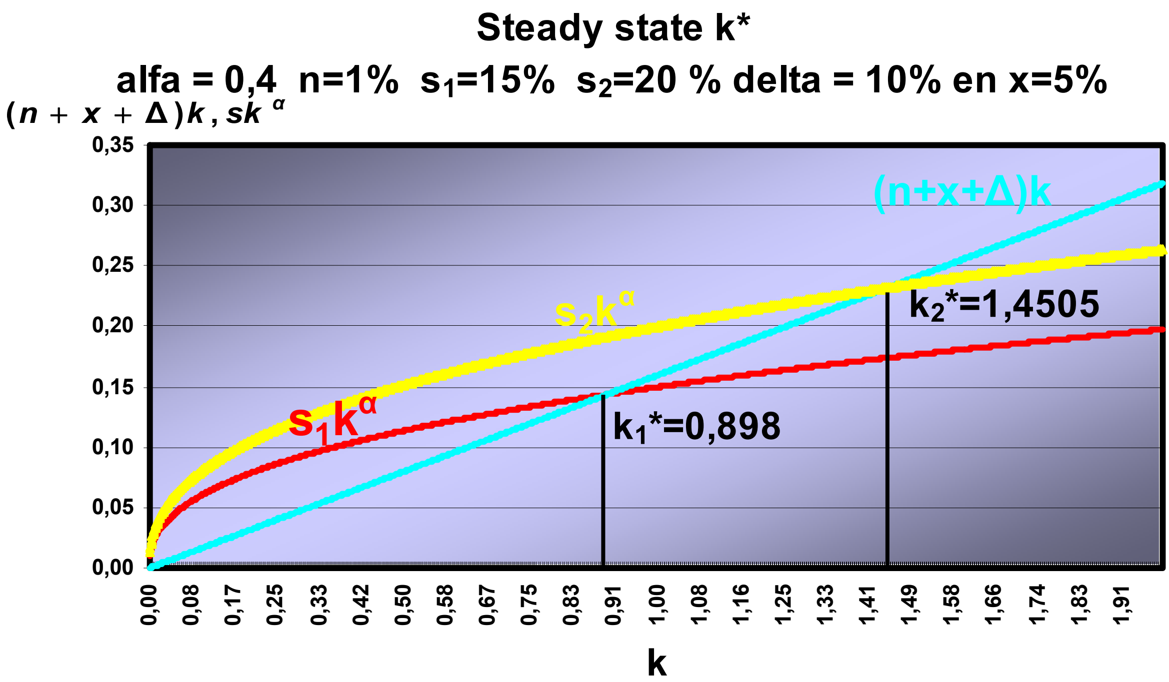
Stel dat in de onderstaande grafiek de oorspronkelijke spaarneiging s_1 was, en dat na een belastingverlaging op het spaarinkomen de spaarneiging stijgt tot s_2 . Als gevolg van de toename van de spaarneiging zal de "steady state" kapitaalintensiteit toenemen van k_1 tot k_2. Dit impliceert dat daar $y = f(k) = k^{\alpha}$ ook het "steady state" per capita inkomen y zal toenemen van y_1 naar y_2 .Eens het nieuwe "steady state" per capita inkomen bereikt, zal de economie blijven groeien aan het tempo van de groei van de arbeid, daar in de steady state $\frac{\dot{y}}{y} = 0$ en $\frac{\dot{Y}}{Y} = n$ (of $n + x$).

---

[5] per capita of per arbeidsequivalent.

[6] per capita of per arbeidsequivalent.

Er is dus een eenmalige toename van het niveau van het “steady state” ^per capita inkomen, waarna de economie blijft groeien aan het ritme van voor de belastingvermindering.



Tot zover de klassieke analyse.

De redenering kan evenwel nog verder worden gezet. Indien, zoals het in een klassiek kader past, wordt verondersteld dat de productiefactoren worden vergoed naar hun marginaal product, dan zal de economie nooit de nieuwe “steady state” niveau’s k_2 en y_2 bereiken. Inderdaad, van zodra de kapitaalintensiteit k stijgt, zal het marginaal product van K

nl $$\frac{\delta F}{\delta K} = f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$$ dalen

daar $$\frac{\delta \alpha k^{\alpha-1}}{\delta k} = \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} < 0$$

Dit impliceert dat de bruto vergoeding van het sparen zal dalen en dus ook de netto vergoeding en de spaarneiging. Daardoor zal s nooit de waarde s_2 bereiken, noch y de waarde y_2. Het beoogde per capita inkomensniveau y_2 blijft dus onbereikbaar.

Conclusie

Het eenmalig inkomensverhogend effect van de verlaging van de belasting op het sparen is geringer dan op het eerste zicht zou kunnen blijken.